2013

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

(Objective-type)

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Is it true that $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ for any two complex numbers z_1 and z_2?

z_1 আৰু z_2 যি কোনো দুটা জটিল সংখ্যা হ'লে, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ উক্তিটো সত্যনে ?

(b) What is the complex conjugate of $\left(1 - \frac{1}{i}\right)$?

$\left(1 - \frac{1}{i}\right)$ ৰ জটিল সংযুগ্ম সংখ্যাটো কি ?

(c) If α, β and γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find the value of

$$\sum \frac{1}{\alpha\beta}$$

যদি α, β আৰু γ তলত দিয়া সমীকৰণৰ মূল হয়

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

তেন্তে $\sum \frac{1}{\alpha\beta}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Write down all the four-fourth roots of unity.

1 ৰ আটাইকেইটা চতুৰ্থ মূল লিখা।

(e) Find the limit of the following sequence :

তলৰ অনুক্ৰমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}^n$$

PART—II

(Very short answer-type)

2. Answer the following questions : 2×5

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If α, β and γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find the value of

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β আৰু γ হ'লে $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ ৰ মান উলিওৱা।

(b) Find the principal value of i^i.

i^i ৰ মুখ্যমান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Examine, if the sequence

$$\{u_n\} = \left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\}$$

is monotonic increasing.

$\{u_n\} = \left\{\frac{2n-7}{3n+2}\right\}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

(d) If z_1 and z_2 are two complex numbers, then prove that

$$\operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{amp} z_1 - \operatorname{amp} z_2$$

যদি z_1 আৰু z_2 দুটা জটিল সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{amp} z_1 - \operatorname{amp} z_2$$

(e) If $n > 1$ is a positive integer, then prove that

$$n(n+1)^2 > 4(\underline{|n})^{3/n}$$

যদি $n > 1$ এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$n(n+1)^2 > 4(\underline{|n})^{3/n}$$

PART—III

(Short answer-type)

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If α and β are the roots of the equation $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$, then show that the equation whose roots are α^n and β^n is

$$x^2 - 2x\cos n\theta + 1 = 0$$

$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ সমীকৰণৰ মূল দুটা α আৰু β হ'লে, তেন্তে দেখুওৱা যে α^n আৰু β^n মূল হোৱা সমীকৰণটো

$$x^2 - 2x\cos n\theta + 1 = 0$$

(b) If a, b and c are the positive reals, then prove that

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)$$

যদি a, b আৰু c তিনিটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)$$

(c) State 'Leibnitz test' for convergence of an alternating series. Show that the series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \infty$$

is a conditionally convergent series. 2

লিব্‌নিজৰ একান্তৰ শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষাটোৰ উক্তি লিখা। দেখুওৱা যে

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \infty$$

শ্ৰেণীটো চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী।

(d) Examine if the sequence $\{u_n\}$, where

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

is monotonic increasing and bounded above. 5

$\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা, য'ত

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

(e) If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are the roots of the equation

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n = 0 \quad (p_n \neq 0)$$

then show that

$$\sum \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{p_n}(p_1 p_n - 1) - n$$ 5

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n = 0 \quad (p_n \neq 0)$$

সমীকৰণৰ মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ হ'লে, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\sum \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{p_n}(p_1 p_n - 1) - n$$

PART—IV

Answer *either (a) or (b)* from each of the following questions :

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা *(a)* অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা :

4. *(a)* *(i)* If $\cos^{-1}(u+iv)=\alpha+i\beta$, then prove that $\cos^2\alpha$ and $\cosh^2\beta$ are the roots of the equation

$$x^2-x(1+u^2+v^2)+u^2=0$$

যদি $\cos^{-1}(u+iv)=\alpha+i\beta$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\cos^2\alpha$ আৰু $\cosh^2\beta$;

$$x^2-x(1+u^2+v^2)+u^2=0$$

সমীকৰণৰ দুটা মূল।

(ii) Show that

দেখুওৱা যে

$$\log\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)=-2i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Hence deduce that

বিশ্লেষণ কৰা যে

$$\tan\left\{i\log\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)\right\}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$ 3+

(b) *(i)* Show that

দেখুওৱা যে

$$\frac{\pi^2}{2\cdot4}-\frac{\pi^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{\pi^6}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}-\cdots=1$$ 6

(ii) Prove that, if $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$, then

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\infty\ (-1<x<1)$$ 4

প্ৰমাণ কৰা যে, যদি $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ হয়, তেন্তে

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\infty\ (-1<x<1)$$

5. *(a)* If $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ are all real numbers, then show that

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$$

State three separate conditions for which the inequality becomes equality. 7+3=10

যদি $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$$

উক্ত অসমতাটো সমতা হোৱাৰ তিনিটা ভিন্ন চৰ্ত লিখা।

(b) (i) Examine for convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ where } u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা বিচাৰ কৰা, য'ত

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{n}$$

(ii) Define *p*-series and write the conditions for convergency. Examine the convergency of the following : 1+1+3

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

p-series ব্যাখ্যা কৰা আৰু অভিসাৰিতা সম্পৰ্কীয় চৰ্তবোৰ লিখা। তলৰ অভিসাৰিতাটো পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

6. (a) (i) Solve by Cardan's method :

কাৰ্ডন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

$$x^3+6x+7=0$$

(ii) If α, β and γ are the roots of the cubic equation $x^3+qx-r=0$, then evaluate $\Sigma(\beta+\gamma-\alpha)^3$.

$x^3+qx-r=0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β আৰু γ হ'লে, $\Sigma(\beta+\gamma-\alpha)^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) State the Cauchy's general principle of convergence. Use it to show that the sequence $\{u_n\}$ is convergent, if

$$u_n = 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n}$$

2+3=5

কচ্চিৰ অভিসাৰিতাৰ সাধাৰণ মূলসূত্ৰটো লিখা। ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱা যে, $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, যদিহে

$$u_n = 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n}$$

(ii) Define d'Alembert's ratio test. Examine the convergence of the following : 5

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\cdots+\frac{x^n}{n^2+1}+\cdots(x>0)$$

ডি'এলেম্বাৰ্টৰ অনুপাত পৰীক্ষাৰ উক্তিটো ব্যাখ্যা কৰা। তলৰ অভিসাৰিতাটো প্ৰমাণ কৰা :

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\cdots+\frac{x^n}{n^2+1}+\cdots(x>0)$$

★★★